2003 Birinci Aşama Sınav Soruları

1. Matematik Olimpiyatlarına hazırlanan İlke şöyle bir program uyguluyor: Her gün en fazla 10 problem çözebilen İlke, 7'den fazla problem çözdüğü günden hemen sonraki iki günde en fazla 5'er problem çözüyor. Bu programı titizlikle uygulayan İlke, 29 günde en fazla kaç problem çözebilir?

A) 206 B) 207 C) 204 D) 203 E) 202

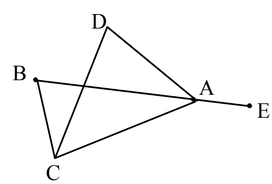
2. x ve y reel sayıları

$$\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + y = 8 \\ x \cdot \dfrac{x+y}{y} = 15 \end{cases}$$

denklemler sistemini sağlıyorsa, $x + y$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

A) 2 B) 3 C) $\sqrt{8}$ D) 5 E) $\sqrt{15}$

3. Şekilde E, A ve B noktaları doğrusal olup, $|AB| = |AC|$, $|DA| = |DC|$ ve $m(\widehat{EAC}) + m(\widehat{ADC}) = 220°$dir. Bu durumda $\widehat{DCB}$ açısı kaç derecedir?



A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

4. a doğal sayısı 4 ayrı asal sayının çarpımının karesi olsun. k ve n, a'nın $k|n$ koşulunu sağlayan pozitif bölenleri olmak üzere, (k, n) ikilileri kaç tanedir? (1 ve a sayıları da a'nın bölenleridir; $k|n$ gösterimi "k, n'yi böler" anlamındadır.)

A) 3^6 B) 4^5 C) 5^4 D) 4^6 E) 6^4

5. $\{1, 2, 3, 4, ..., 20, 21, 22\}$ kümesinden en az kaç eleman atılmalı ki, geriye kalan sayıların çarpımı bir tamkare olsun?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

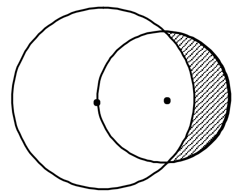
6. $x + y + z \leq a$ eşitsizliğini sağlayan her pozitif gerçel x, y, z sayıları için $xyz \leq a$ eşitsizliği de sağlanıyorsa, a gerçel sayısına bir "iyi sayı" diyelim. En büyük "iyi sayının" karesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 36

7. $y \leq z$ olmak üzere, $x^y + x^z = x^{111t}$ denkleminin pozitif tamsayılarda çözümünün var olduğu biliniyorsa, aşağıdakilerden hangisi sağlanmalıdır?

A) $y + z = 111t$ B) $111t = y + 1$ C) $x \geq 111t$ D) t bir tek sayıdır E) Hiçbiri

8. Şekildeki küçük çemberin yarıçapı $\sqrt{5}$, büyük çemberin yarıçapı da $\sqrt{10}$'dur. Küçük çember, büyük çemberin merkezinden geçiyorsa, taralı bölgenin alanı nedir?



A) $2\sqrt{5}$ B) $\frac{5\pi}{2} - \sqrt{10}$ C) $5\sqrt{2}$

D) 5 E) $5\pi - 10$

9. Şekilde , 3 satırı ve 20 sütunu olan bir tablonun bir parçası gösterilmiştir. I. satırda 1'den 20'ye kadar, II. satırda 21'den 40'a kadar ve III. satırda da 41'den 60'a kadar doğal sayılar sırayla yazılmıştır. Şekilde gördüğünüz x, y ve z sayılarının üçü de Ayşe'nin yaşına bölünüyorsa, Ayşe'nin yaşı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

				x				
		y						
						z		

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

10. $p(x)$ ve $q(x)$, başkatsayıları 2003 olan 2. dereceden farklı iki polinomdur.

$$p(3) + p(5) + p(10) = q(3) + q(5) + q(10)$$

ise, $p(x) = q(x)$ eşitliğini sağlayan x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

11. $1 + 3 + 5 + \cdots + 97 + 99$ ifadesinde en az kaç "+" işareti "$-$" işareti ile değiştirilmelidir ki, sonuç 700'e eşit olsun?

A) 9 B) 11 C) 8 D) 7 E) 10

12. Kenar uzunlukları, $|AB| = 3$, $|BC| = 4$ ve $|AC| = 5$ olan ABC üçgeninin [BC] kenarı üzerinde M ve [AC] kenarı üzerinde N noktaları alınmıştır. [MN] parçası ABC üçgeninin alanını yarıya bölüyorsa, [MN] parçasının uzunluğu en az kaç olabilir?

A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{2}$

13. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ olmak üzere, $\dfrac{xz + zy}{x^2 + y^2 + 18z^2}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

A) $\frac{\sqrt{18}}{27}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{6}$

14. $n + 1$ ve $16n + 1$ ifadelerinin ikisini de tamkare yapan $n \geq 1$ tamsayılarının sayısı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 3'ten çok, ama sonlu çoklukta E) Sonsuz çoklukta

15. $a_1 = 1$ ve p bir asal sayı olmak üzere, her $n \geq 2$ için a_n dizisi $a_n = a_{n-1} + p^{n-1}$ şeklinde tanımlansın. $a_{2003} - a_{1998}$ sayısının bir tamkare olması için p kaç olmalıdır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

16. $\dfrac{3n + 11 + 13}{11}, \dfrac{3n + 12 + 14}{12}, \dfrac{3n + 13 + 15}{13}, \ldots, \dfrac{3n + 54 + 56}{54}, \dfrac{3n + 55 + 57}{55}$ kesirlerinin hiçbiri sadeleşmeyecek biçimde alınmış n doğal sayılarının en küçüğünün rakamlar toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

17. $2002^2 \leq n \leq 2003^2$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane n doğal sayısı için $[\![\sqrt{n}]\!]$ sayısı n'yi böler? (Burada, $[\![...]\!]$ tamdeğer fonksiyonudur.)

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) $\lceil\sqrt{2002}\rceil$

18. ABC dik üçgeninin [AB] ve [BC] dik kenarları üzerinde D ve E noktaları, $m(\widehat{BAE})$=30° ve $m(\widehat{BDC})$=45° olacak biçimde alınmıştır. $|AE| = \sqrt{3}$ ve $|CD| = \sqrt{2}$ ise, [AE] ve [CD]'nin kesişim noktası ile [AB] parçası arasındaki uzaklığı bulunuz.

A) $\dfrac{1}{2(\sqrt{3}-1)}$ B) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ C) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2} - 1$ E) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

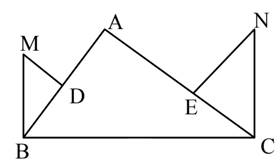
19. $\dfrac{17x-5}{6}$ ve $\dfrac{14x+5}{9}$ sayılarının ikisi de tamsayı olacak biçimde kaç tane x tamsayısı vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Sonsuz çoklukta

20. Şekilde, $m(\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{C}) = 80°$, $m(\mathrm{A}\widehat{\mathrm{C}}\mathrm{B}) = 55°$ ve |BC| = 3'tür. D, [AB]'nin ve E de [AC]'nin orta noktaları olmak üzere,

[MD] $\perp$ [AB], [MB] $\perp$ [BC],
[NE] $\perp$ [AC], [NC] $\perp$ [BC]

ise |MB|·|NC| sayısı aşağıdakilerden hangisidir?



A) 4 B) 6 C) $3\sqrt{2}$ D) $4\sin(80°)\sin(55°)$ E) 4,5